Applicazioni del metodo di induzione matematica
Incontri con allievi del Liceo Classico
Luisa Rossi - Politecnico di Milano - Gennaio-Aprile 2011

1. Somma dei primi interi (non nulli)

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) + n$$

Verifichiamo per qualche n , ad esempio $n = 0, n = 1$

$S(1) = \frac{1}{2}2 = 1$ $\qquad$ $S(2) = \frac{2(3)}{2} = 3$

Verifichiamo che, vero $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, segue $S(n+1)$

$$S(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Segue che la formula è vera per ogni n.

2. Somma progressione geometrica di ragione $q \neq 1$

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{n-1} + q^n$$

Verifichiamo per qualche n , ad esempio: $n = 0, n = 1, n = 2$

$S(0) = 1 = \frac{1-q}{1-q} = 1$

$S(1) = 1 + q = \frac{1-q^2}{1-q} = 1 + q$

$S(2) = 1 + q + q^2 = \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}$

Verifichiamo che, vero $S(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, segue $S(n+1)$

$$S(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

Segue che la formula è vera per ogni n.

- Analizzare a parte il caso $q = 1$.

Osservazione

Che cosa succede nella relazione $S(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ al variare di q $(q \neq 1)$?

Dopo avere visto l'andamenti delle funzioni $y = x^n$ (cfr . 2° incontro), si comprende che quando $-1 < q < 1$ il valore di q^{n+1} diventa sempre più *piccolo*, al crescere di n. Allora, quando $n \to +\infty$, da $S(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si può dedurre il valore della somma di "infiniti" addendi del tipo q^k cioè la somma della *serie geometrica* $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

perchè il termine q^{n+1} *tende* a 0.

Quando $|q| > 1$, allora q^{n+1} diventa, in valore assoluto, sempre più *grande* al crescere di n, e la serie non ha più somma finita

3. Somma dei quadrati degli interi (non nulli)

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Verifichiamo per qualche n , ad esempio $n = 1, n = 2$

$S(1) = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ $\qquad$ $S(2) = 1+4 = \frac{2(3)5}{6} = 5$

Verifichiamo che, vero $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, segue $S(n+1)$

$$S(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] =$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = (n+1)\frac{2(n+2)(n+3/2)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1](2n+3)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Segue che la formula è vera per ogni n.

Attenzione alla decomposizione del polinomio : $2n^2 + 7n + 6$